PART4 確率変数の変換

要点① 確率変数の変換と $aX+b$ の期待値

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，a，b を定数として，X の1次式

$$Y=aX+b$$

で Y を定めると，Y は

$$y_k=ax_k+b$$

で定まる値をとる確率変数であり，Y の確率分布は右の表のようになる。このとき，Y の期待値 $E(Y)$ は

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$\begin{aligned}E(Y)&=E(aX+b)\\&=(ax_1+b)\cdot p_1+(ax_2+b)\cdot p_2+\cdots\cdots+(ax_n+b)\cdot p_n\\&=a(x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n)+b(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)\\&=a\qquad+b\cdot\\&=aE(X)+b\end{aligned}$$

よって，次のことが成り立つ。

$aX+b$ の期待値

確率変数 X と定数 a，b について

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

例　確率変数 X の期待値が3であるとき，$Y=2X-1$ で表される確率変数 Y の期待値は

$$E(Y)=E(2X-1)=\quad E(X)\qquad=2\cdot3-1=5$$

要点 ② $aX+b$ の分散，標準偏差

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

確率変数 X，および a，b を定数として X の 1 次式 $Y=aX+b$ で定められる確率変数 Y の確率分布が右の表で与えられているとき，Y の分散と標準偏差を考える。

$E(X)=m$ とすると

$$E(Y)=aE(X)+b=am+b$$

Y の分散 $V(Y)$ は

$$V(Y)=\{y_1-E(Y)\}^2p_1+\{y_2-E(Y)\}^2p_2+\cdots\cdots+\{y_n-E(Y)\}^2p_n$$

$$=\{(ax_1+b)-(am+b)\}^2p_1+\{(ax_2+b)-(am+b)\}^2p_2$$

$$+\cdots\cdots+\{(ax_n+b)-(am+b)\}^2p_n$$

$$=\{a(x_1-m)\}^2p_1+\{a(x_2-m)\}^2p_2+\cdots\cdots+\{a(x_n-m)\}^2p_n$$

$$= \quad \{(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n\}$$

$$= \quad V(X)$$

Y の標準偏差 $\sigma(Y)$ は

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{a^2V(X)}= \quad \sigma(X)$$

よって，次のことが成り立つ。

$aX+b$ の分散，標準偏差

確率変数 X と定数 a，b について

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$$

例 確率変数 X の分散が 2 であるとき，$Y=3X+5$ で表される確率変数 Y の分散と標準偏差は

$$V(Y)=V(3X+5)= \quad V(X)=3^2\cdot 2=18$$

$$\sigma(Y)=\sigma(3X+5)= \quad \sigma(X)=3\sqrt{2}$$

※ $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

4 確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，確率変数 $6X-5$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

Point Pickup

$aX+b$ の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X と定数 a，b について

期待値　$E(aX+b)=aE(X)+b$

分散　$V(aX+b)=a^2V(X)$

標準偏差　$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

第 6 講　PART4 確認問題

1 確率変数 X の確率分布が下の表で与えられているとき，確率変数 $4X-3$ の期待値，分散，標準偏差を求め，答えは，下の①～⑧のうちから選べ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(4X-3)=$ ア ，$V(4X-3)=$ イ ，

$\sigma(4X-3)=$ ウ

① 2　② 5　③ 15　④ $\sqrt{15}$

⑤ $\frac{5}{4}$　⑥ $\frac{9}{4}$　⑦ $\frac{15}{16}$　⑧ $\frac{\sqrt{15}}{4}$

PART4 確率変数の変換

4 確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，確率変数 $6X-5$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

[解答]

$$E(X)=1\cdot\frac{6}{12}+2\cdot\frac{3}{12}+3\cdot\frac{2}{12}+4\cdot\frac{1}{12}=\frac{22}{12}=\frac{11}{6}$$

$$V(X)=1^2\cdot\frac{6}{12}+2^2\cdot\frac{3}{12}+3^2\cdot\frac{2}{12}+4^2\cdot\frac{1}{12}-\left(\frac{11}{6}\right)^2=\frac{52}{12}-\frac{121}{36}=\frac{35}{36}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{36}}=\frac{\sqrt{35}}{6}$$

よって　$E(6X-5)=6E(X)-5=6\cdot\frac{11}{6}-5=6$

$$V(6X-5)=6^2\,V(X)=6^2\cdot\frac{35}{36}=35$$

$$\sigma(6X-5)=|6|\sigma(X)=6\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}=\sqrt{35}$$

※$\sigma(6X-5)=\sqrt{V(6X-5)}=\sqrt{35}$

第 6 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：③，ウ：④

[解説]

X の期待値，分散，標準偏差は

$$E(X)=0\cdot\frac{2}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{2}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

$$V(X)=0^2\cdot\frac{2}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{2}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{5}{4}\right)^2$$

[A]

$$=\frac{20}{8}-\frac{25}{16}=\frac{15}{16}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

[A]　確率変数 X の分散は
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

よって

$$E(4X-3)=4E(X)-3$$

[B]

$$=4\cdot\frac{5}{4}-3=\mathbf{2}$$

$$V(4X-3)=4^2\,V(X)=4^2\cdot\frac{15}{16}=\mathbf{15}$$

$$\sigma(4X-3)=|4|\sigma(X)=4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{\mathbf{15}}$$

※$\sigma(4X-3)=\sqrt{V(4X-3)}=\sqrt{\mathbf{15}}$

[B]　確率変数 X と定数 a，b について
期待値　$E(aX+b)=aE(X)+b$
分散　$V(aX+b)=a^2\,V(X)$
標準偏差　$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$